$\Leftrightarrow (1+a_2)a_1 - (-a_1)(1-a_2) = 0$

$\Leftrightarrow a_1 + a_1a_2 + a_1 - a_1a_2 = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = 0.$

**b-** $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow (1+a_2)(1-a_2) + (-a_1)a_1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - (a_2)^2 - (a_1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a_2)^2 + (a_1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow |a| = 1.$

**3/a-** En profitant du théorème d'EULER on a :

$\otimes \quad 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}} = \left[e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\right]e^{i\frac{x}{2}} = e^{ix} + e^{ix0} = 1 + e^{ix}$

$\oplus \quad -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}} = -\left[e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right]e^{i\frac{x}{2}} = -e^{ix} + e^{ix0} = 1 - e^{ix}.$

**b-** ■ $1 + ia = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha} = 1 + e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$

or $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

donc $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) > 0$ par suite $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$ est la forme exponentielle de $1 + ia$.

■ $1 - ia = 1 - e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = -2i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$ c'est la forme exponentielle de $1 - ia$ car $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ puisque $0 < \frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

**c-** OAB est isocèle rectangle en O $\Leftrightarrow$ OA = OB et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |1 + ia| = |1 - ia| \\ |a| = 1 \quad \text{ce qui est vrai car } a = e^{i\alpha} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$ **d'après 3/b-**

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$ **puisque** $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \in ]0; \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow \underline{a = e^{i0} = 1}$

## PROBLEME

**A-1)a-** $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f_1(x) - f_1(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1+x}\,e^{-x}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = +\infty$

$\overset{\text{déf}}{\Rightarrow} f_1$ n'est pas dérivable à droite en $(-1)$.